Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas V (MA-2112)
1er Examen Parcial (50 %)
Abril-Julio 2023

Sección 1 y Sección 2

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. **(Total: 13 ptos.)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar dado por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,\, y) \neq 0, \\ 0, & (x,\, y) = 0. \end{cases}$$

   a) Diga si $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

   b) Diga si existe la derivada direccional de f en $(0,0)$ respecto al vector unitario

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

2. **(Total: 12 ptos.)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable, con un plano tangente a su gráfica en el punto $\boldsymbol{A} = (2,1)$ dado por

$$6x - y - z = 13.$$

   Ahora, sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el campo escalar definido según

$$h(u,v,w) = f\Big(x(u,v,w),\, y(u,v,w)\Big),$$

   donde

$$x(u,v,w) = u^2 - v, \quad \text{y} \quad y(u,v,w) = v^2 + w^2.$$

   Determine la derivada de h en el punto $\boldsymbol{P} = (1,-1,0)$.

3. **(Total: 13 ptos.)** Sea $z = f(x,y)$ una función definida implícitamente por

$$F(x,y,z) = x^2 - y - z^3 - z = 0,$$

   para todo $x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$. Escriba la fórmula de Taylor de 2do orden de f en $\boldsymbol{P} = (-1,1)$.

4. **(Total: 12 ptos.)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar dado por

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

y K una región del plano definida según

$$K = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\right\}.$$

Determine los extremos absolutos de f en K.

Solución

1. *a*) La primera condición a verificar en nuestro procedimiento es que f sea continua en $(0,0)$. Así, vea que mediante un cambio de variables a coordenadas polares,

$$\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r} = \frac{1}{4}r^3\sin^2 2\theta,$$

con $r>0$, $\theta\in[0,2\pi)$, y por consiguiente

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{4}r^3\sin^2 2\theta = 0.$$

Luego, como

$$0 \le \left|\frac{1}{4}r^3\sin^2 2\theta\right| < \left|r^3\right|$$

para todo $\theta\in[0,2\pi)$, entonces en virtud del teorema del emparedado podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0).$$

Ahora que hemos concluido que f es continua, procedamos a evaluar el siguiente límite para determinar si f es diferenciable en $(0,0)$,

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{|f(\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{0})-\boldsymbol{h}\cdot\nabla f(\boldsymbol{0})|}{\|\boldsymbol{h}\|}, \quad \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^2.$$

Primero,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{0}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 0 = 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{0}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 0 = 0.$$

Usando lo anterior, $\nabla f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ y por tanto f es diferenciable si

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{|f(\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{0})-\boldsymbol{h}\cdot\nabla f(\boldsymbol{0})|}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{|f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Si tomamos $\boldsymbol{h} = (a, b)$, el límite anterior equivale a

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Usando un argumento similar al dado inicialmente para analizar la continuidad de f, mediante el cambio a coordenadas polares $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ obtenemos

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{4} r^2 \sin^2 2\theta = 0.$$

Por último, como

$$0 \leq \left| \frac{1}{4} r^2 \sin^2 2\theta \right| < \left| r^2 \right|,$$

se sigue que

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{|f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0$$

y que f es diferenciable en $(0, 0)$.

b) Para mostrar si existe la derivada direccional $f'(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{u})$, tenemos al menos dos estrategias disponibles. La primera consiste en argumentar que como f es diferenciable en $(0, 0)$ entonces la derivada direccional existe y es dada por

$$f'(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla f(\boldsymbol{0}).$$

Por otro lado, la segunda consiste en evaluar el límite según la definición de derivada direccional para el punto $(0, 0)$. A continuación mostramos ambas estrategias.

1) Como f es diferenciable en $(0, 0)$, entonces la derivada direccional $f'(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{u})$ existe y es dada por

$$f'(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{0} = 0.$$

2) La derivada direccional requerida por el enunciado puede calcularse mediante su definición,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{0})}{h}.$$

Note que

$$f(h\boldsymbol{u}) = \frac{h^4}{4\,|h|},$$

y por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{4\,|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\,h}{4} = 0.$$

Finalmente, $f'(\boldsymbol{0};\boldsymbol{u})$ existe y

$$f'(\boldsymbol{0};\boldsymbol{u}) = 0.$$

2. Para determinar la derivada de h en $\boldsymbol{P}$, primero observe que h puede escribirse como una composición

$$h = f \circ g,$$

donde $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es dada por

$$g(u, v, w) = (u^2 - v,\; v^2 + w^2),$$

y de aquí que

$$Dg(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2u & -1 & 0 \\ 0 & 2v & 2w \end{pmatrix}.$$

Observe que todas las derivadas parciales de g son funciones continuas sobre $\mathbb{R}^3$ (en el sentido multivariable). Entonces, g es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. De esta manera, como h es la composición de dos funciones diferenciables, se sigue que h es también diferenciable y

$$h'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{b}) \circ g'(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{b} = g(\boldsymbol{a}),\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Ahora,

$$g(\boldsymbol{P}) = (2, 1) = \boldsymbol{A},$$

y por ende

$$\nabla h(\boldsymbol{P}) = \nabla f(\boldsymbol{A}) \cdot Dg(\boldsymbol{P}).$$

Sea $\boldsymbol{A'} = (2, 1, f(\boldsymbol{A}))$. $Dg(\boldsymbol{P})$ podemos calcular directamente, y para $\nabla f(\boldsymbol{A})$ podemos hacer uso inteligente de la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $\boldsymbol{A}$ dada en el enunciado. Si $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, entonces $F(x, y, z) = 0$ representa la gráfica de f como una curva de nivel de F. Así, es bien sabido que $\nabla F(\boldsymbol{A'})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A'}) = 0$ describe precisamente la ecuación de un plano tangente a la gráfica de f en el punto $\boldsymbol{A}$. Comparando término a término con la ecuación dada en el enunciado,

$$(x-2)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{A}) + (y-1)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - (z - f(\boldsymbol{A})) = 0,$$

$$6x - y - z - 13 = 0,$$

obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{A}) = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{A}) = -1$$

y por consiguiente, $\nabla f(\boldsymbol{A}) = (6, -1)$. Finalmente,

$$\nabla h(\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Para determinar la fórmula de Taylor de 2do orden necesitaremos calcular las derivadas parciales de f de primer y segundo orden en $\boldsymbol{P}$ y el valor de f en $\boldsymbol{P}$. Sea

$$g(x, y) = F(x, y, f(x, y)).$$

Primero, observe como

$$g(\boldsymbol{P}) = -f(\boldsymbol{P})^3 - f(\boldsymbol{P}) = 0$$

implica

$$f(\boldsymbol{P}) = 0,$$

pues la ecuación $z^3 + z = 0$ posee una única solución $z = 0$ para $z \in \mathbb{R}$. Luego, derivando implícitamente a F mediante g obtenemos[1] que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

es equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial_x F}{\partial_z F}.$$

De forma similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial_y F}{\partial_z F},$$

y en vista que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{P}) = -3f(\boldsymbol{P})^2 - 1 \neq 0,$$

entonces estas expresiones para las derivadas de primer orden de f son válidas en $\boldsymbol{P}$. Así,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1 + 3z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1 + 3z^2}$$

y evaluando en $\boldsymbol{P}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{P}) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{P}) = -1.$$

[1]Empleando la regla de la cadena para campos escalares

Para las derivadas segundas podemos calcular directamente a partir de los resultados anteriores,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{(1+3z^2)^2} \cdot \left[2(1+3z^2) - 12xz\frac{\partial f}{\partial x}\right], \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{6z}{(1+3z^2)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -\frac{12xz}{(1+3z^2)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{6z}{(1+3z^2)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}
\end{aligned}$$

y evaluando en $\boldsymbol{P}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{P}) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{P}) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{P}) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{P}) = 0.$$

Finalmente, la fórmula de Taylor de 2^{do} orden para f alrededor de $\boldsymbol{P}$ es dada por

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}) &\approx f(\boldsymbol{P}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{P}) \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{P}) \cdot y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{P}) \cdot x^2, \\
&= -2x - y + x^2.
\end{aligned}$$

4. Primero, note que

$$\nabla f(x,y) = (2x, 6y).$$

Por ende, f posee un único punto estacionario en $(0,0) \in K$. Pero como $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ para todo x, $y \in K$, entonces por definición $f(0,0)$ es el mínimo global para f en K. Ahora, dado que $(0,0)$ es el único punto estacionario de f, entonces en virtud del teorema de valor extremo f debe alcanzar su máximo global sobre la frontera de K. Procedamos a analizar la región dada.

Observe como $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$ es equivalente a

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 4.$$

De esta manera, K no es más que un disco de radio 2 centrado en $(1,0)$, y su frontera puede describirse mediante la ecuación

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

Luego, los valores de f sobre la frontera de K pueden obtenerse parametrizando y en términos de x, y

$$f\left(x,\, y\right) = x^2 + 3\left(4 - \left(x-1\right)^2\right) = -2x^2 + 6x + 9, \quad x,\, y \in \partial K, \quad x \in [-1, 3].$$

Sea $K' = [-1, 3]$. La expresión anterior alcanza un único punto estacionario para $x = 3/2$, y así quedan por analizar cuatro puntos en ∂K donde f podría alcanzar su máximo absoluto:

$$\boldsymbol{P}_1 = \left(\frac{3}{2},\, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), \qquad \boldsymbol{P}_2 = \left(\frac{3}{2},\, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right),$$

que resultan del punto estacionario dado anteriormente sobre K', y

$$\boldsymbol{P}_3 = \left(-1,\, 0\right), \qquad \boldsymbol{P}_4 = \left(3,\, 0\right),$$

que corresponden a la frontera de K' dada por $\partial K' = \{-1, 3\}$. Evaluando a f en cada uno de los puntos[2], obtenemos

$$f(\boldsymbol{P}_1) = f(\boldsymbol{P}_2) = \frac{27}{2},$$
$$f(\boldsymbol{P}_3) = 1, \quad f(\boldsymbol{P}_4) = 9.$$

Finalmente, f alcanza el máximo absoluto

$$f(\boldsymbol{P}_1) = \frac{27}{2}$$

sobre K en $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$.

[2]No olvide que f satisface $f(x, y) = f(x, -y)$.

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Samuel Alonso** para **GECOUSB**

Samuel Alonso
14-10028
Lic. en Física

GECO USB

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **alonso.smontenegro@gmail.com**